Министерство науки и высшего образования РФ

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»

Институт экономики и бизнеса

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ»

Ульяновск 2018

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Вероятностные методы в экономике» / составитель: А.Е.Эткин.- Ульяновск: УлГУ, 2020.

Настоящие методические указания предназначены для студентов экономических направлений и специальностей очной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Вероятностные методы в экономике». В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля и задания для самостоятельной работы.

Студентам рекомендуется использовать данные методические указания при самостоятельном изучении дисциплины.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс ученым советом Института экономики и бизнеса УлГУ. (Протокол № 213/09 от « 24» мая 2018 г.

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2019.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. Учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2019.
3. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика в экономике: математические методы и модели. Учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2019.

2.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Тема 1. Случайные события и их вероятности.

Основные вопросы темы:

1. Классическое определение вероятности.
2. Геометрическое определение вероятности.
3. Элементы комбинаторики.
4. Совместные и несовместные события.
5. Вероятность суммы событий.
6. Условная вероятность. Вероятность произведения событий.
7. Независимость событий.
8. Полная группа несовместных событий.
9. Априорная и апостериорная вероятности гипотез.
10. Формула полной вероятности.
11. Формула Байеса.

Рекомендации по изучению темы.

С указанными выше вопросами можно ознакомиться по учебнику [1] (глава 1) или по учебнику [3] (пп. 1.1 – 1.4).

Задания для самостоятельной работы:

а) Ответьте на вопросы следующего теста (среди ответов может быть любое количество верных, включая 0).

Тест.

1. Если события А и В несовместны, то они

а) зависимы; б) независимы; в) достоверны; г) невозможны;

д) противоположны; е) образуют полную группу событий.

2. Если события А и В совместны, то они

а) зависимы; б) независимы; в) достоверны; г) невозможны;
д) противоположны; е) образуют полную группу событий.

3. Если $P(A + B) = P(A) + P(B)$, то А и В

а) зависимы; б) независимы; в) совместны; г) несовместны;
д) достоверны; е) невозможны; ж) противоположны;
з) образуют полную группу событий.

4. Если $P(A) + P(B) = 1$, то А и В

а) зависимы; б) независимы; в) совместны; г) несовместны; д) достоверны; е) невозможны; ж) противоположны;
з) образуют полную группу событий.

5. Равенство $P(A + B) = P(A) + P(B)$ верно для

а) любых событий А и В; б) несовместных событий; в) совместных событий;
г) независимых событий; д) зависимых событий.

6. Неравенство $P(A + B) \le P(A) + P(B)$ верно для

а) любых событий А и В; б) несовместных событий; в) совместных событий;
г) независимых событий; д) зависимых событий; е) неверно.

7. Неравенство $P(A) + P(B) > 1$

а) невозможно; б) влечет совместность событий А и В;
в) влечет несовместность событий А и В; г) влечет зависимость событий А и В;
д) влечет независимость событий А и В.

8. Неравенство $P(A + B) > P(A) + P(B)$ верно для

а) любых событий А и В; б) несовместных событий; в) совместных событий;
г) независимых событий; д) зависимых событий; е) неверно.

9. Если $P(A\,B) = P(A)P(B)$, то А и В

а) зависимы; б) независимы; в) совместны; г) несовместны;
д) достоверны; е) невозможны; ж) противоположны;
з) образуют полную группу событий.

10. Равенство $P(A\,B) = P(A)P(B)$ верно для

а) любых событий А и В; б) несовместных событий; в) совместных событий;
г) независимых событий; д) зависимых событий; е) неверно.

11. Неравенство $P(A\,B) \le P(A)P(B)$ верно для

а) любых событий А и В; б) несовместных событий; в) совместных событий;
г) независимых событий; д) зависимых событий; е) неверно.

12. Неравенство $P(A\,B) \ge P(A)P(B)$ верно для

а) любых событий А и В; б) несовместных событий; в) совместных событий;
г) независимых событий; д) зависимых событий; е) неверно.

13. Если события А и В зависимы, то из следующих равенств

1) $P(A \mid B) = P(A)$; 2) $P(A \mid B) = P(B)$; 3) $P(B \mid A) = P(A)$;
4) $P(B \mid A) = P(B)$; 5) $P(B \mid A) = P(A \mid B)$; 6) $P(AB) = P(A)\,P(B)$;
верны:

а) 1,2,3; б)2,4,6; в) 1,3,5; г) 1,4,6; д) 2,3,5; е) 3,4,6.

14. Если события А и В независимы, то из следующих равенств

1) $P(A \mid B) = P(A)$; 2) $P(A \mid B) = P(B)$; 3) $P(B \mid A) = P(A)$;
4) $P(B \mid A) = P(B)$; 5) $P(B \mid A) = P(A \mid B)$; 6) $P(AB) = P(A)\,P(B)$;
верны:

а) 1,2,3; б)2,4,6; в) 1,3,5; г) 1,4,6; д) 2,3,5; е) 3,4,6.

15. Противоположные события

1) зависимы; 2) независимы; 3) образуют полную группу событий.
Из этих утверждений верны:

а) 1; б) 2; в) 3; г)1,3; д) 2,3.

16. События А и В являются независимыми, если
а) они не могут произойти одновременно; б) $P(AB) = P(A)\,P(B)$;
в) $P(A \mid B) = P(A)$; г) $P(B \mid A) = P(B)$; д) $P(B \mid A) = P(A \mid B)$;
е) вероятность события А не зависит от вероятности события В.

17. Выбрать из следующих условий те, совокупность которых означает, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий:
а) $A_1 A_2 \ldots A_n = \Omega$; б) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$; в) $A_1 A_2 \ldots A_n = \varnothing$;
г) $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$; д) $A_i A_j = \Omega$ при $i \neq j$.

18. Формула полной вероятности позволяет
а) определить априорные вероятности гипотез;
б) определить вероятности гипотез при условии выполнения некоторого события;
в) определить вероятность события по условным вероятностям этого события по каждой из гипотез;
г) определить вероятность события по условным вероятностям гипотез;
д) определить условную вероятность события.

19. Формула Байеса позволяет
а) определить априорные вероятности гипотез;
б) определить вероятности гипотез при условии выполнения некоторого события;
в) определить вероятность события по условным вероятностям этого события по каждой из гипотез;
г) определить вероятность события по условным вероятностям гипотез;
д) определить условную вероятность события.

20. События А и В образуют полную группу несовместных событий. Какие из следующих утверждений верны?
а) $A = \overline{B}$; б) $B = \overline{A}$ в) А и В противоположны;
г) $\overline{A}$ и $\overline{B}$ несовместны; д) $\overline{A}$ и $\overline{B}$ образуют полную группу событий.

б) Решите приведенные ниже задачи.

1. Студент может уехать в институт или автобусом, который ходит через каждые 20 минут, или трамваем, который ходит через каждые 10 минут. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших 5 минут?
2. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,7, четвертый – 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего.
3. Два стрелка производят по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель: а) оба; б) только один; в) ни один.
4. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 4%, а вследствие дефекта В – 3,5%. Годная продукция завода составляет 95%. Найти вероятность того, что:
   а) среди забракованной по признаку А продукции встретится дефект В;
   б) среди продукции, не обладающей дефектом А, встретится дефект В.
5. Сколько раз нужно подбросить кубик, чтобы с вероятностью не меньше 0,99, можно было утверждать, что по крайней мере один раз выпадет 6 очков.
6. Прибор может работать в трех режимах: 1) нормальном, 2) форсированном и 3) недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 60% случаев работы прибора, форсированный – в 30% и недогруженный – в 10%. Надежность прибора (вероятность безотказной работы в течение заданного времени t) для нормального

режима равна 0,8, для форсированного – 0,5, для недогруженного – 0,9. Найти полную (с учетом случайности условий) надежность прибора.

7. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов и может работать в одном из двух режимов: нормальном и благоприятном. Нормальный режим наблюдается в 80% случаев эксплуатации прибора, неблагоприятный - в 20% случаев. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого из узлов в нормальном режиме равна 0,9, в неблагоприятном – 0,6. При отказе узла происходит автоматическое и безотказное переключение на дублера. Найти полную вероятность безотказной работы прибора.
8. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна α. Вероятность принять здорового человека за больного равна β. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании. Вычислить эту вероятность при $\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}001$.
9. Отдел технического контроля (ОТК) проводит сортировку выпускаемых заводом приборов. Каждый прибор независимо от остальных имеет дефекты с вероятностью p. При проверке в ОТК наличие дефектов обнаруживается с вероятностью α, кроме того с вероятностью β исправный прибор при проверке может вести себя как дефектный. Все приборы, у которых при проверке обнаружены отклонения от стандарта, бракуются. Найти вероятность q_0 того, что незабракованный прибор имеет дефекты, и вероятность q_1 того, что забракованный прибор имеет дефекты. При каких условиях $q_0 > q_1$?
10. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин - дальтоники. На обследование прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?
11. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% - с заболеванием L, 20% - с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.
12. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму - 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым - 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

Тема 2. Случайные величины и их числовые характеристики.

Дискретные случайные величины.

Основные вопросы темы:

1. Понятие случайной величины.
2. Закон распределения случайной величины. Ряд распределения. Дискретные случайные величины.
3. Функция распределения и ее свойства.
4. Плотность распределения и ее свойства.

5. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана, квантили, начальные и центральные моменты.
6. Свойства математического ожидания и дисперсии.
7. Схема испытаний Бернулли. Биномиальное и геометрическое распределения.
8. Потоки событий и их свойства. Закон Пуассона.

Рекомендации по изучению темы.

С указанными выше вопросами можно ознакомиться по учебнику [1] (главы 2 – 4) или по учебнику [3] (пп. 2.1 – 2.2).

Задания для самостоятельной работы:

а) Ответьте на вопросы следующего теста (среди ответов может быть любое количество верных, включая 0).

Тест.

1. Случайной величиной называется

а) постоянная величина, которая меняется случайным образом;
б) функция, значениями которой являются случайные числа;
в) случайное событие;
г) числовая функция, определенная на алгебре событий;
д) результат испытания со случайным исходом;
е) числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий.

2. Закон распределения дискретной случайной величины определяется

а) плотностью распределения; б) рядом распределения;
в) функцией распределения; г) математическим ожиданием;
д) дисперсией; е) стандартным отклонением.

3. Какие из следующих распределений случайных величин являются дискретными:

а) показательное; б) распределение Пуассона; в) нормальное;
г) биномиальное; г) геометрическое; д) равномерное.

4. В тесте 5 вопросов. Студент не подготовился к экзамену и выбирает ответы случайным образом. Вероятность правильного ответа на вопрос теста равна 0,2. Какова вероятность того, что студент ответит правильно ровно на два вопроса теста?

а) 0,4; б) $0{,}04 + 0{,}8^3$; в) $0{,}04\cdot 0{,}8^3$; г) $0{,}4\cdot 0{,}8^3$; д) $0{,}4 + 0{,}8^3$.

5. Зная закон распределения случайной величины можно определить ее

а) математическое ожидание; б) дисперсию;
в) стандартное отклонение; г) все начальные моменты;
д) все центральные моменты.

6. Интервал между событиями в простейшем потоке распределен

а) равномерно; б) по нормальному закону; в) по закону Пуассона;
г) по показательному закону; д) по биномиальному закону.

7. Математическое ожидание случайной величины есть

а) среднее значение этой случайной величины;
б) значение случайной величины, имеющее максимальную вероятность;

в) значение случайной величины, ожидаемое при следующем испытании;
г) значение x, при котором плотность p(x) максимальна;
д) значение x, при котором F(x) максимальна;
е) значение x, при котором F(x)=0,5.

8. Мода дискретной случайной величины есть
а) среднее значение этой случайной величины;
б) значение случайной величины, имеющее максимальную вероятность;
в) значение случайной величины, ожидаемое при следующем испытании;
г) значение x, при котором плотность p(x) максимальна;
д) значение x, при котором F(x) максимальна;
е) значение x, при котором F(x)=0,5.

9. Математическим ожиданием случайной величины называется
а) начальный момент первого порядка;
б) начальный момент второго порядка;
в) центральный момент первого порядка;
г) центральный момент второго порядка;
д) квадратный корень из центрального момента второго порядка.

10. В тесте 5 вопросов. Студент не подготовился к экзамену и выбирает ответы случайным образом. Вероятность правильного ответа на вопрос теста равна 0,2. За правильный ответ ставится 5 баллов, за неправильный – 0. Затем подсчитывается среднее арифметическое. Случайная величина X – полученная студентом оценка. Чему равно ее математическое ожидание?
а) 0,8; б) 1; в) 1,8; г) 2; д) 2,6.

11. Дисперсией случайной величины называется
а) начальный момент первого порядка;
б) начальный момент второго порядка;
в) центральный момент первого порядка;
г) центральный момент второго порядка;
д) квадрат ее математического ожидания;
е) математическое ожидание ее квадрата.

12. Какими из следующих свойств обладает математическое ожидание случайной величины X (c – произвольная константа):
а) M(c) = 0; б) $M(cX) = c^2M(X)$; в) M(c) = c;
г) M(cX) = cM(X); д) $M(X^2) = [M(X)]^2$.

13. Пусть F(x) – функция распределения случайной величины X. Какие из следующих свойств справедливы:
а) F(x) – монотонно возрастает; б) F(x) – монотонно убывает;
в) F(x) – непрерывна;
г) $F(-\infty)=0$; д) $F(0)=-\infty$; е) $F(+\infty)=1$; ж) $F(+\infty)=0$;
з) $F(x)\geq 0$ при всех x; и) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 1$.

14. Какими из следующих свойств обладает дисперсия случайной величины X (c – произвольная константа):
а) $D(c) = 0$; б) $D(cX) = c^2D(X)$; в) $D(c) = c$;
г) $D(cX) = cD(X)$; д) $D(X^2) = [D(X)]^2$;

15. Производится стрельба по мишени до первого попадания. Случайная величина X – число выстрелов. Эта случайная величина распределена
а) по биномиальному закону; б) по геометрическому закону;
в) по закону Пуассона; г) по показательному закону;
д) по нормальному закону.

16. Монета бросается до тех пор, пока не выпадет герб. Какова вероятность того, что монета будет подброшена 3 раза?

а) 1/4; б) 1/8; в) 1/16; г) 3/8; д) 5/16.

17. Пусть F(x) – функция распределения дискретной случайной величины X. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $P(X \le x) = F(x)$; б) $P(X > x) = F(x)$;

в) $P(X \le x) = 1 - F(x)$; г) $P(X \ge x) = 1 - F(x)$;

д) $P(X > x) = 1 - F(x)$; е) $P(X = x) = F(x)$.

18. Биномиальное распределение с параметрами n и p сходится к пуассоновскому при условии:

а) $n \to \infty$; б) $p \to 0$; в) $np = const,\ \ p \to 1$;

г) $np = const,\ \ p \to 0$; д) $p = const,\ \ np \to \infty$.

19. Бросается игральная кость (кубик). Случайная величина X – число выпавших очков. Чему равно ее математическое ожидание?

а) 2,5; б) 3; в) 3,16; г) 3,33; д) 3,5.

20. Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром λ равно

а) λ; б) $1/\lambda$; в) 0; г) λ^2; д)$1/\lambda^2$.

21. Пусть F(x) – функция распределения дискретной случайной величины X. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$; б) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$;

в) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$; г) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$;

д) $P(a \le X \le b) = F(a) - F(b)$; е) $P(a < X < b) = F(a) + F(b)$.

22. Понятие функции распределения имеет смысл

а) для любой случайной величины;
б) только для дискретной случайной величины;
в) только для непрерывной случайной величины;
г) для любого случайного события;
д) только для смешанной случайной величины.

б) Решите приведенные ниже задачи.

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым – 0,4. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.
2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,4. Производится 6 выстрелов. Случайная величина X – число попаданий в цель. Построить ее ряд распределения. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Составить закон распределения числа попаданий в цель.
3. Имеется пять различных ключей, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа опробований при открывании замка, если испробованный ключ в последующих попытках открыть замок:
    a. а) не участвует; б) участвует.
4. Обрыв связи произошел на одном из пяти звеньев телефонного кабеля. Монтер последовательно проверяет звенья для обнаружения места обрыва. Составить закон распределения числа обследованных звеньев, если вероятность обрыва связи одинакова для всех звеньев.
5. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время *t* с вероятностью $p = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти

вероятность следующих событий: за время *t* откажет а) ровно 3 элемента; б) хотя бы один элемент; в) не более 3-х элементов.

6. Провайдер обслуживает абонентов сети Internet. Среднее число абонентов, входящих в сеть провайдера за минуту, равно 120. Найти вероятность того, что:
   а) за две секунды в сеть не войдет ни один абонент; б) за две секунды войдут не менее двух абонентов; в) за одну секунду войдут три абонента; г) за 3 секунды войдут не менее 3-х абонентов.
7. Передается 5 сообщений по каналу связи. Каждое сообщение с вероятностью p=0,3 независимо от других искажается. Случайная величина X – число искаженных сообщений. Построить ее ряд распределения. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Найти вероятность того, что будет искажено не менее двух сообщений.

Тема 3. Непрерывные случайные величины. Предельные теоремы теории вероятности.

Основные вопросы темы:

1. Непрерывные случайные величины.
2. Плотность распределения и ее свойства.
3. Равномерное распределение.
4. Показательное распределение.
5. Связь показательного распределения с потоками событий.
6. Нормальное распределение. Функция Лапласа. Правило 3-х сигма.
7. Неравенства Маркова и Чебышева.
8. Сходимость по вероятности.
9. Теоремы Чебышева, Бернулли и Пуассона.
10. Центральная предельная теорема. Теорема Ляпунова.
11. Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа.

Рекомендации по изучению темы.

С указанными выше вопросами можно ознакомиться по учебнику [1] (глава 4) или по учебнику [3] (пп. 2.4 – 2.5).

Задания для самостоятельной работы:

а) Ответьте на вопросы следующего теста (среди ответов может быть любое количество верных, включая 0).

Тест.

1. Какие из следующих распределений случайных величин являются непрерывными:

а) показательное; б) распределение Пуассона; в) нормальное;
г) биномиальное; г) геометрическое; д) равномерное.

2. Закон распределения непрерывной случайной величины определяется
а) плотностью распределения; б) рядом распределения;
в) функцией распределения; г) математическим ожиданием;
д) дисперсией; е) стандартным отклонением.

3. Плотность показательного распределения равна

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{x}$; б) $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$; в) $\dfrac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}$; г) $1-e^{-\lambda x}$; д) $\lambda e^{-\lambda x}$.

4. Интервал между событиями в простейшем потоке распределен
а) равномерно; б) по нормальному закону; в) по закону Пуассона;
г) по показательному закону; д) по биномиальному закону.

5. Мода непрерывной случайной величины есть
а) среднее значение этой случайной величины;
б) наиболее часто встречающееся значение;
в) значение случайной величины, ожидаемое при следующем испытании;
г) значение x, при котором плотность p(x) максимальна;
д) значение x, при котором F(x) максимальна;
е) значение x, при котором F(x)=0,5.

6. Медиана непрерывной случайной величины есть
а) среднее значение этой случайной величины;
б) наиболее часто встречающееся значение;
в) значение случайной величины, ожидаемое при следующем испытании;
г) значение x, при котором плотность p(x) максимальна;
д) значение x, при котором F(x) максимальна;
е) значение x, при котором F(x)=0,5.

7. Стандартным отклонением случайной величины называется
а) начальный момент первого порядка;
б) начальный момент второго порядка;
в) центральный момент первого порядка;
г) центральный момент второго порядка;
д) квадратный корень из центрального момента второго порядка.

8. . Пусть p(x) – плотность распределения случайной величины X. Какие из следующих свойств справедливы:
а) p(x) – монотонно возрастает; б) p(x) – монотонно убывает;
в) p(x) – непрерывна;
г) $p(-\infty)=0$; д) $p(0)=-\infty$; е) $p(+\infty)=1$; ж) $p(+\infty)=0$;

з) $p(x)\geq 0$ при всех *x*; и) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

9. Пусть p(x) – плотность, а F(x) – функция распределения случайной величины X. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $p'(x)=F(x)$; б) $F'(x)=p(x)$; в) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$;

г) $p(x)=\int_{-\infty}^{x} F(t)dt$; д) $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$; е) $p(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$.

10. Пусть F(x) – функция распределения непрерывной случайной величины X. Какие из следующих соотношений справедливы:
а) $P(X\leq x)=F(x)$; б) $P(X>x)=F(x)$;
в) $P(X\leq x)=1-F(x)$; г) $P(X\geq x)=1-F(x)$;

д) $P(X > x) = 1 - F(x)$; е) $P(X = x) = F(x)$.

11. Пусть p(x) – плотность распределения непрерывной случайной величины X. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $P(X = x) = p(x)$; б) $P(X > x) = \int_0^x p(t)dt$;

в) $P(X \le x) = \int_x^\infty p(t)dt$; г) $P(X > x) = \int_x^\infty p(t)dt$;

д) $P(X \ge x) = \int_x^\infty p(t)dt$; е) $P(X = x) = 0$.

12. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ сходится по вероятности к числу *a*, если

а) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1$ для некоторого $\varepsilon > 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 1$ для некоторого $\varepsilon > 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1$ для некоторого $\varepsilon > 0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$;

13. Пусть F(x) – функция распределения непрерывной случайной величины X. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$; б) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$;

в) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$; г) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$;

д) $P(a \le X \le b) = F(a) - F(b)$; е) $P(a < X < b) = F(a) + F(b)$.

14. Неравенство Чебышева верно

а) для любой случайной величины;

б) только для нормально распределенной случайной величины;

в) только для непрерывной случайной величины;

г) только для дискретной случайной величины;

д) только для случайной величины, распределенной по показательному закону.

15. Пусть p(x) – плотность распределения непрерывной случайной величины X. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)dx$; б) $P(a < X \le b) = \int_a^b p(x)dx$;

в) $P(a \le X < b) = \int_a^b p(x)dx$; г) $P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$.

16. Математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром λ равно

а) λ; б) $1/\lambda$; в) 0; г) λ^2; д) $1/\lambda^2$.

17. Понятие плотности распределения имеет смысл

а) для любой случайной величины;

б) только для дискретной случайной величины;

в) только для непрерывной случайной величины;

г) для любого случайного события;

д) только для смешанной случайной величины.

18. Дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром λ равна
а) λ; б) $1/\lambda$; в) 0; г) λ^2; д) $1/\lambda^2$.

б) Решите приведенные ниже задачи.

1. Случайная величина X подчиняется закону распределения Парето с параметрами $a > 0$ *и* $x_0 > 0$, если ее функция распределения имеет вид:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_0, \\ 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^a, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$
Выяснить, при каких значениях параметра a для данного распределения существуют математическое ожидание и дисперсия и вычислить их.
2. В некоторых странах действует закон о налогообложении, распространяемый на тех частных предпринимателей, годовой доход которых превосходит некоторый установленный законом уровень x_0. Считая, что годовой доход наудачу выбранного лица, облагаемого налогом, является случайной величиной X, распределенный по закону Парето с параметрами $a = 4$, $x_0 = 1000$, найти вероятность события $A = \{|X-m|<\sigma\}$, где m- математическое ожидание, а σ– среднее квадратичное отклонение случайной величины X.
3. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью распределения
$$p(x) = \begin{cases} c \cdot \cos x, & \text{если } -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$
Найти константу c, вычислить $P(|X|< \pi/4)$, $M(X)$, $D(X)$.
4. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Найти плотность распределения случайной величины Т - времени, в течение которого ему придется ждать поезда, ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Найти вероятность того, что ждать придется не более полминуты.
5. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.
6. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания, равным t_0. Найти вероятности событий $A = \left\{\dfrac{t_0}{2} \le X < \dfrac{3}{2} t_0\right\}$ и $B = \{X \ge 2t\}$.
7. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами $m = 16$ км, $\sigma = 100$м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами: а). не меньше 15,8 км; б). не более 16,25 км; в). от 15,75 до 16,3 км.
8. Диаметр детали, изготовленной цехом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Ее дисперсия равна 0,0001 $см^2$, а

математическое ожидание равно 2,5 *см*. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключен диаметр наудачу взятой детали.
9. Количество воды, необходимое в течение суток предприятию для технических нужд, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 125м. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды на предприятии превысит 500 м.
10. Случайная величина X – результат измерения некоторой физической величины, закон распределения которой неизвестен. Определить, какую максимально возможную относительную точность измерения можно гарантировать с вероятностью, не меньшей 0,95, при следующих данных: а) известно, что $m_x = 0{,}1$, $\sigma_x = 0{,}02$ и проводится одно измерение; б) проводится 5 измерений и в качестве результата X берется среднее арифметическое измеренных значений; в) в качестве результата берется среднее арифметическое 100 измеренных значений.
11. Вероятность рождения мальчика $p = 0{,}512$. Вычислить вероятности событий: а) среди 100 новорожденных будет 51 мальчик; б) среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек; в) разница между количеством мальчиков и количеством девочек из 100 новорожденных не превысит 10.
12. Отдел технического контроля проверяет качество наудачу отобранных 900 деталей. Вероятность p того, что деталь стандартна, равна 0,9. Случайная величина X – число стандартных деталей в партии. Найти наименьший интервал, симметричный относительно математического ожидания m, в котором с вероятностью, не меньшей 0,9544, будет заключено число стандартных деталей.

Тема 4. Системы случайных величин.

Основные вопросы темы:

1. Векторная случайная величина. Закон распределения многомерной случайной величины.
2. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства.
3. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины.
4. Одномерные законы распределения.
5. Условные распределения.
6. Закон распределения двумерной непрерывной случайной величины.
7. Определение (совместной) плотности распределения.
8. Свойства плотности.
9. Функции распределения и плотности одномерных составляющих двумерной случайной величины.
10. Условные законы распределения одномерных составляющих двумерной непрерывной случайной величины.
11. Условные плотности распределений и их свойства.
12. Независимые случайные величины.
13. Условия независимости для дискретных и непрерывных случайных величин.
14. Числовые характеристики системы случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, условные математические ожидания, функции регрессии, ковариация, коэффициент корреляции.
15. Свойства математического ожидания, дисперсии, ковариации и коэффициента корреляции.

Рекомендации по изучению темы.

С указанными выше вопросами можно ознакомиться по учебнику [1] (глава 5) или по учебнику [3] (п. 2.3).

Задания для самостоятельной работы:

а) Ответьте на вопросы следующего теста (среди ответов может быть любое количество верных, включая 0).

Тест.

1. Система случайных величин – это:
а) случайная величина, значениями которой являются векторы;
б) система уравнений, решениями которой являются случайные числа;
в) упорядоченный набор случайных величин;
г) функция распределения и плотность случайной величины.

2. Пусть $p(x,y)$ – совместная плотность распределения системы случайных величин (X, Y), $p_1(x)$, $p_2(y)$ – соответственно плотности распределений X и Y. Тогда
а) $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$; б) $p(x,y) = p_1(x) + p_2(y)$; в) $p(x,y) = p_1(x)p_2(y|x)$;
г) $p(x,y) = p_1(y)p_2(x|y)$; д) $p(x,y) = p_1(x)p_2(x|y)$.

3. Пусть $P = \left(p_{ij}\right)_{m\times n}$ – матрица вероятностей, определяющая закон распределения системы случайных величин (X, Y). Тогда
а) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$; б) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$; в) $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1$; г) $(\sum_{i=1}^{m} p_{ij})(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}) = 1$.

4. Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда
а) $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$; б) $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$; в) $M(XY) = M(X)M(Y)$;
г) $K(X, Y) = 0$; д) $p(x,y) = p_1(x)p_2(y|x)$; е) $r_{xy} = 0$.

5. Какие из условий вопроса 4 являются необходимыми для независимости случайных величин X и Y?

6. Какие из условий вопроса 4 являются достаточными для независимости случайных величин X и Y?

7. Выберите верные утверждения:
а) Независимые случайные величины не коррелированны;
б) Некоррелированные случайные величины независимы;
в) Зависимые случайные величины коррелированны;
г) Коррелированные случайные величины зависимы.

8. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий
а) для любых случайных величин;
б) только для независимых случайных величин;
в) только для зависимых случайных величин;
г) только для некоррелированных случайных величин;
д) только для коррелированных случайных величин.

9. Математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий
(см. предыдущие варианты ответов).

10. Дисперсия суммы случайных величин равна сумме их дисперсий
а) для любых случайных величин;
б) только для независимых случайных величин;
в) только для зависимых случайных величин;
г) только для некоррелированных случайных величин;
д) только для линейно зависимых случайных величин;

е) ни для каких случайных величин.

11. Стандартное отклонение суммы случайных величин равно сумме их стандартных отклонений
(см. предыдущие варианты ответов).

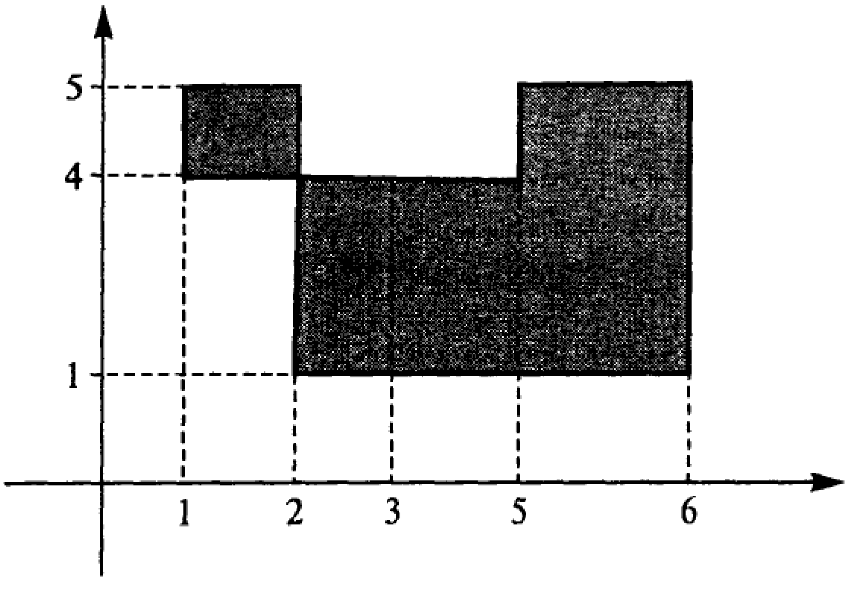
12. Зная совместный закон распределения системы случайных величин (X, Y), можно определить:
а) законы распределения случайных величин X и Y;
б) ковариацию K(X,Y);
в) коэффициент корреляции r_{xy};
г) функции регрессии $m_{y|x}$ и $m_{x|y}$.

13. Совместный закон распределения системы случайных величин (X, Y), можно определить, зная:
(см. предыдущие варианты ответов).

14. Для случайных величин X и Y выберите верные утверждения:
а) если X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$; б) если $r_{xy} = 0$, то X и Y независимы;
в) если X и Y зависимы, то $|r_{xy}| = 1$; г) если $|r_{xy}| = 1$, то X и Y зависимы;
д) если X и Y линейно зависимы, то $|r_{xy}| = 1$;
е) если $|r_{xy}| = 1$, то X и Y линейно зависимы.

б) Решите приведенные ниже задачи.

1. Двумерная случайная величина задана своей функцией распределения *F(x,y)*. Найти вероятность попадания этой случайной величины в указанную на рисунке область.



2. Совместное распределение двумерного случайного вектора (X, Y) задано таблицей: X = (-1, 1), Y = (-1, 0, 1), $p_{11} = \frac{7}{24}$, $p_{12} = \frac{1}{12}$, $p_{13} = \frac{1}{8}$, $p_{21} = \frac{1}{8}$, $p_{22} = \frac{1}{6}$, $p_{23} = \frac{5}{24}$.
Найти: а) одномерные законы распределения случайных величин X, Y, X + Y, X – Y;
б) условные законы распределения случайной величины Y;
в) числовые характеристики: m_x, m_y, D_x, D_y, K_{xy}, r_{xy} ;
г) совместный закон распределения системы случайных величин (X + Y, X – Y).

Зависимы ли случайные величины: а) X и Y; б) X + Y и X – Y?

3. Случайные величины X и Y принимают, соответственно, значения $\{0, 1\}$ и $\{1, 2\}$. Найти их совместный закон распределения, если $m_x = 0.7,\ m_y = 1.6,\ D_x = 0.21.$
4. Система случайных величин (X, Y) распределена с постоянной плотностью (равномерно) внутри квадрата со стороной a, стороны которого составляют углы 45° с осями координат. Найти: $p(x, y),\ p_1(x),\ p_2(y)$. Определить зависимы ли X и Y.
   Найти: $p_1(x|y),\ p_2(y|x),\ m_{x,}\ \ m_{y,}\ D_{x,}\ D_{y,}\ \sigma_{x,}\ \sigma_{y,} K_{xy,}\ r_{xy,}\ m_{x|y,}\ \ m_{y|x.}$
5. Система случайных величин (X, Y) распределена с постоянной плотностью (равномерно) внутри треугольника с вершинами A(-2, 0), B(0, 1), C(1, 0).
   Найти: $p(x, y),\ p_1(x),\ p_2(y)$. Определить зависимы ли X и Y.
   Найти: $p_1(x|y),\ p_2(y|x),\ m_{x,}\ \ m_{y,}\ D_{x,}\ D_{y,}\ \sigma_{x,}\ \sigma_{y,} K_{xy,}\ r_{xy,}\ m_{x|y,}\ \ m_{y|x.}$

Тема 5. Точечные и интервальные оценки параметров распределений.

Основные вопросы темы:

1. Понятие статистической оценки параметра.
2. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, эффективность.
3. Примеры оценок.
4. Методы получения оценок.
5. Понятие интервальной оценки параметра. Доверительный интервал. Точность и надежность оценки.
6. Общая схема построения доверительных интервалов.
7. Законы распределения, часто используемые в математической статистике: распределение Пирсона (χ^2), распределение Стьюдента, распределение Фишера-Снедекора.
8. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины. Случаи известной и неизвестной дисперсии.
9. Доверительный интервал для оценки дисперсии нормально распределенной случайной величины. Случаи известного и неизвестного математического ожидания.
10. Доверительный интервал для оценки вероятности события.

Рекомендации по изучению темы.

С указанными выше вопросами можно ознакомиться по учебнику [1] (глава 9) или по учебнику [3] (пп. 3.1 – 3.4).

Для построения доверительных интервалов целесообразно использовать следующую таблицу.

Доверительные интервалы для оценки параметров распределений

Распределение	Оцениваемый параметр	Предположение о других параметрах	Вспомогательная статистика	Распределение статистики	Двусторонний доверительный интервал	Односторонние доверительные интервалы
Нормальное $N(m,\sigma)$	m	σ известно	$\frac{(\bar{x}-m)\sqrt{n}}{\sigma}$	*N(0,1)*	$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\delta}{2}}<m<\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\delta}{2}}$	$m>\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\delta}$, $m<\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\delta}$
$N(m,\sigma)$	m	σ неизвестно	$\frac{(\bar{x}-m)\sqrt{n}}{s}$	*T(n-1)*	$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\delta}{2}}(n-1)<m<\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\delta}{2}}(n-1)$	$m>\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\delta}(n-1)$, $m<\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\delta}(n-1)$
$N(m,\sigma)$	D (=σ^2)	m известно	$\frac{nD^*}{D}$	$\chi^2(n)$	$\frac{nD^*}{\chi^2_{\frac{1+\delta}{2}}(n)}<D<\frac{nD^*}{\chi^2_{\frac{1-\delta}{2}}(n)}$	$D>\frac{nD^*}{\chi^2_{\delta}(n)}$, $D<\frac{nD^*}{\chi^2_{1-\delta}(n)}$
$N(m,\sigma)$	D (=σ^2)	m неизвестно	$\frac{ns^2}{D}$	$\chi^2(n-1)$	$\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{1+\delta}{2}}(n-1)}<D<\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{1-\delta}{2}}(n-1)}$	$D>\frac{ns^2}{\chi^2_{\delta}(n-1)}$, $D<\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\delta}(n-1)}$
Биномиальное B(n,p)	p	$np>3\sqrt{npq}$, $nq>3\sqrt{npq}$	$\frac{(p^*-p)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$	*N(0,1)*	$p^*-u_{\frac{1+\delta}{2}}\sqrt{\frac{p^*q^*}{n}}<p<p^*+u_{\frac{1+\delta}{2}}\sqrt{\frac{p^*q^*}{n}}$	$p^*-u_{\delta}\sqrt{\frac{p^*q^*}{n}}<p<1$, $0<p<p^*+u_{1-\delta}\sqrt{\frac{p^*q^*}{n}}$

Задания для самостоятельной работы:

Решите приведенные ниже задачи.

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью δ = 0.99 неизвестного математического ожидания m случайной величины X, если известны генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 4$, выборочное среднее $\bar{x} = 10.2$ и объем выборки $n = 16$.
2. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью δ = 0.95 точность оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины X равна 0.1, если известно генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 2$.
3. Из нормально распределенной генеральной совокупности извлечена выборка:
   2.4, 0.4, 3.5, 5.6, 5.4, 6.5, -1.4, 2.5, 5.2, 0.8.
   Оценить с надежностью δ = 0.95 генеральное среднее.
4. По выборке из задачи 3 оценить генеральную дисперсию, если известно, что генеральное среднее $m = 3$.
5. По выборке из задачи 3 оценить генеральную дисперсию.
6. При испытании 1000 элементов зарегистрировано 100 отказов. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента, с вероятностью δ = 0.95.
7. По результатам социологического обследования при опросе 1500 респондентов рейтинг президента (т.е. процент опрошенных, одобряющих его деятельность) составил 30%. Найти границы, в которых с надежностью 0.95 заключен рейтинг президента (при опросе всех жителей страны). Сколько респондентов надо опросить, чтобы с надежностью 0.99 гарантировать предельную ошибку социологического обследования не более 1%? Тот же вопрос, если никаких данных о рейтинге президента нет.

Тема 6. Проверка статистических гипотез.

Основные вопросы темы:

1. Понятие статистической гипотезы.
2. Виды гипотез.
3. Статистический критерий.
4. Область принятия гипотезы и критическая область.
5. Ошибки 1-го и 2-го рода.
6. Уровень значимости и мощность критерия.
7. Проверка гипотез о равенстве средних и дисперсий.
8. Проверка гипотез о значении одного из параметров нормального распределения при известном и неизвестном втором параметре.
9. Проверка гипотезы о значении вероятности события.
10. Проверка гипотезы о виде закона распределения на основе критериев Пирсона и Колмогорова.
11. Проверка гипотез об однородности выборок.

Рекомендации по изучению темы.

С указанными выше вопросами можно ознакомиться по учебнику [1] (глава 10) или по учебнику [3] (п. 3.5).

Критерии проверки статистических гипотез о параметрах распределений

Распределение	Основная гипотеза	Предположение о других параметрах	Статистика критерия	Распределение статистики	Область принятия гипотезы и альтернативная гипотеза	
					Двусторонняя критическая область	Правосторонняя критическая область
Биномиальное B(n,p)	$p = p_0$	–	$K = \dfrac{(p^* - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	$N(0,1)$	H_1: $p \neq p_0$, $\quad \lvert K \rvert < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	H_1: $p > p_0$, $\quad \lvert K \rvert < u_{1-\alpha}$
Нормальное	$D_X = D_Y$	m_X, m_Y известны	$K = \dfrac{D_X^*}{D_Y^*}$	$F(m,n)$	$H_1: D_X \neq D_Y$, $\quad K < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)$	$H_1: D_X > D_Y$, $\quad K < f_{1-\alpha}(m,n)$
Нормальное	$D_X = D_Y$	m_X, m_Y неизвестны	$K = \dfrac{s_X^2}{s_Y^2}$	$F(m-1,n-1)$	$H_1: D_X \neq D_Y$, $K < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$	$H_1: D_X > D_Y$, $K < f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
Нормальное	$m_X = m_Y$	D_X, D_Y известны	$K = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{D_X}{m} + \dfrac{D_Y}{n}}}$	$N(0,1)$	$H_1: m_X \neq m_Y$, $\quad \lvert K \rvert < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$H_1: m_X > m_Y$, $\quad K < u_{1-\alpha}$
Нормальное	$m_X = m_Y$	D_X, D_Y неизвестны, m, n –соотв. объемы выборок X, Y	$K = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{mn(m+n-2)}{m+n}}$	$T(m+n-2)$	$H_1: m_X \neq m_Y$, $\lvert K \rvert < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$	$H_1: m_X > m_Y$, $K < t_{1-\alpha}(m+n-2)$
Нормальное	$D=D_0$	m известно	$K = \dfrac{nD_X^*}{D_0}$	$\chi^2(n)$	$H_1: D \neq D_0$ $\quad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) < K < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$	$H_1: D > D_0$, $\quad K < \chi^2_{1-\alpha}(n)$
Нормальное	$D=D_0$	m неизвестно	$K = \dfrac{(n-1)s^2}{D_0}$	$\chi^2(n-1)$	$H_1: D \neq D_0$ $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < K < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$H_1: D > D_0$, $\quad K < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
Нормальное	$m=m_0$	$D = \sigma^2$ известно	$K = \dfrac{(\overline{X} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma}$	$N(0,1)$	$H_1: m \neq m_0$, $\quad \lvert K \rvert < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$H_1: m > m_0$, $\quad K < u_{1-\alpha}$
Нормальное	$m=m_0$	$D = \sigma^2$ неизвестно	$K = \dfrac{(\overline{X} - m_0)\sqrt{n}}{s}$	$T(n-1)$	$H_1: m \neq m_0$, $\quad \lvert K \rvert < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$H_1: m > m_0$, $\quad K < t_{1-\alpha}(n-1)$

Для проверки статистических гипотез целесообразно использовать приведенную выше таблицу.

Задания для самостоятельной работы:

а) Пройдите тест к главе 10 учебника [1].

б) Выполните упражнения 10.16 – 10.20 и 10.32 – 10.38 к главе 10 учебника [1].

Тема 7. Модель парной регрессии.

Основные вопросы темы:

1. Интерпретация регрессионных уравнений в случае линейной, степенной и показательной зависимостей.
2. Основные гипотезы классической линейной регрессионной модели.
3. Гомоскедастичность и гетероскедастичность.
4. Автокорреляция.
5. Метод наименьших квадратов.
6. Теорема Гаусса-Маркова.
7. Остатки регрессии.
8. Оценка дисперсии ошибок.
9. Интервальные оценки коэффициентов регрессии.
10. Коэффициент детерминации.
11. t-статистика и F-статистика.
12. Проверка гипотез о значимости коэффициентов.

Рекомендации по изучению темы

С указанными выше вопросами можно ознакомиться как по учебнику [1] (пп. 13.1 – 13.4), так и по учебнику [3] (пп. 10.1 – 10.2). Можно использовать также учебник [2] (глава 3)

Задания для самостоятельной работы:

а) Ответьте на вопросы 1 – 6 теста к главе 13 учебника [1];

б) Выполните следующие упражнения.

1. Регрессионная зависимость расходов на питание США от времени за период с 1959 по 1983 гг. ($t = 1$ для 1959 г., $t = 2$ для 1960 г. и т.д.) задана уравнением $\hat{y} = 95{,}3 + 2{,}53t$. Интерпретируйте результаты оценивания регрессии. Как изменился бы результат оценивания регрессии, если бы в качестве t использовались фактические даты (1959-1983 гг.)?

2. Регрессионная зависимость расходов на оплату жилья от располагаемого личного дохода, где обе величины измерены в млрд. долларов за период с 1959 по 1983 г. оценена в следующем

виде: $\hat{y} = -27{,}6 + 0{,}178x$. Регрессионная зависимость расходов на оплату жилья от времени имеет вид: $\hat{y} = 48{,}9 + 4{,}84t$. Дайте экономическое толкование этих регрессий. Они предполагают различные объяснения для одних и тех же данных по переменной *y*. В какой степени они могут быть согласованы?

3. Регрессионная зависимость расходов на оплату жилья от располагаемого личного дохода оценена в виде: $\hat{y} = 0{,}0308x^{1{,}23}$. Регрессионная зависимость расходов на оплату жилья от времени имеет вид: $\hat{y} = 59{,}15e^{0{,}045t}$. Дайте экономическое толкование этих регрессий.

4. Два сотрудника нефтяной компании изучали зависимость объема добычи нефти и мировой цены на нефть. Каждый из них вычислил показатель ковариации и коэффициент корреляции. Первый сотрудник объем добычи считал в баррелях и цену в долларах, а второй – в тоннах и рублях соответственно. Потом они сравнили результаты. Одинаковыми или различными были получены у них результаты? Ответ поясните.

5. Определите, какие из следующих зависимостей между *x* и *y* линейны по переменным, линейны по параметрам, нелинейны ни по переменным, ни по параметрам.

a) $y = a + bx^3$, b) $y = a + b\ln x$, c) $\ln y = a + b\ln x$, d) $y = a + bx^c$,

e) $y^a = b + cx^2$, f) $y = 1 + a(1 - x^b)$, g) $y = a + b\dfrac{x}{10}$.

6. Исследователь считает, что в нестохастической части истинной модели y пропорционален *x*: $y = bx + \varepsilon$. Выведите МНК-оценку для *b*.

7. Выведите МНК-оценку для *a* в модели $y = a + \varepsilon$.

8. Наблюдения 16 пар *(x, y)* дали следующие результаты:

$$\sum y^2 = 526, \quad \sum x^2 = 657, \quad \sum xy = 492, \quad \sum y = 64, \quad \sum x = 96.$$

Для модели регрессии $y = a + bx + \varepsilon$ найдите: МНК-оценки коэффициентов регрессии, стандартную ошибку регрессии, стандартные ошибки коэффициентов регрессии. Проверьте значимость коэффициентов регрессии. Значимо ли коэффициент *b* отличается от 1?

9. В таблице представлены расходы на агрегированное потребление *y* и агрегированный располагаемый доход *x* в некоторой национальной экономике в течение 12 лет с 1986 по 1997г.

Год	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
X	170	179	187	189	193	199	200	207	215	216	220	225
Y	152	159	162	165	170	172	177	179	184	186	190	191

a) Изобразите графически зависимость *y* от *x* и определите, есть ли приближенная линейная зависимость *y* от *x*.
b) Вычислите парную регрессию *y* на *x*.
c) Вычислите s , $s_{\hat{a}}$, $s_{\hat{b}}$.
d) Вычислите коэффициент детерминации.
e) Сформулируйте нулевую (основную) и альтернативную гипотезы при проверке статистической значимости коэффициентов регрессии.
f) Какое распределение имеют оценки $\hat{a}$ и $\hat{b}$, если предполагать, что ошибки распределены по нормальному закону?
g) Какое распределение используется при проверке статистической значимости *a* и *b*?
h) Чему равно число степеней свободы?
i) Проверьте на 5%-уровне значимость коэффициентов *a* и *b*.
j) Постройте 95%-доверительный интервал для коэффициентов *a* и *b*.

Примечание. В пп. a)-d) можно использовать MS Excel.

10. Для изучения влияния образования на величину почасовой оплаты труда на основе опроса 40 человек была оценена модель регрессии $\ln \hat{w} = \underset{0{,}02}{2{,}2} + \underset{0{,}04}{0{,}1}edu$

(в скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов), где edu – уровень образования (в годах), w – уровень почасовой оплаты труда. Дайте интерпретацию коэффициентов модели. Значимо ли уровень образования влияет на почасовую оплату труда при уровне значимости 10%? 5%? 1%?

Каков ожидаемый уровень почасовой оплаты труда человека с одиннадцатилетним образованием? С девятилетним образованием?

11. Для изучения функции спроса на некоторый товар была оценена по 25 наблюдениям регрессионная модель зависимости спроса от цены (в $) $\ln \hat{D} = \underset{0,07}{0,91} - \underset{0,2}{1,21}\ln P$ (в скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов). Дайте интерпретацию коэффициентов модели. Чему равна эластичность спроса по цене? Каков ожидаемый объем продаж при цене $2? $1,5? Постройте доверительный интервал для эластичности спроса по цене с доверительной вероятностью 90%, 95%, 99%. Значимо ли эластичность отличается от -1 при уровне значимости 10%? 5%? 1%?

12. Пусть имеется следующая оценка регрессии, характеризующая зависимость y от x: $\hat{y} = 8 - 7x$. Известно также, что $r_{xy} = -0,5$; $n=20$. Постройте доверительный интервал для коэффициента регрессии в этой модели с вероятностью а) 90%; б) 99%.

13. Менеджер новой чебуречной не уверен в правильности выбранной цены на чебуреки, поэтому в течение 12 недель он варьирует цену и записывает количество проданных чебуреков. Полученные данные приведены в таблице (j – номер недели, q_j – количество проданных чебуреков, p_j – цена одного чебурека (руб.)).

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_j	12,3	11,5	11,0	12,0	13,5	12,5	12,8	9,9	12,2	12,5	13,0	10,5
q_j	795	915	965	892	585	644	714	1180	851	779	625	1001

a) Оцените параметры модели $\ln q = a + b \ln p$.

b) Используя полученные оценки коэффициентов, и зная, что себестоимость производства одного чебурека равна 6 руб., найдите оптимальную цену чебурека.

Тема 8. Модель множественной регрессии.

Основные вопросы темы:

1. Многомерная линейная регрессионная модель.
2. Основные гипотезы. Нормальная линейная регрессионная модель.
3. Статистические свойства МНК-оценок для множественной регрессии.
4. Оценка дисперсии ошибок и матрицы ковариаций.
5. Интервальные оценки коэффициентов множественной регрессии.
6. Проверка статистических гипотез о значениях коэффициентов множественной регрессии.
7. Проверка общего качества оценки множественной линейной регрессии. Коэффициент детерминации (множественной корреляции).
8. Скорректированный коэффициент детерминации.
9. Проверка значимости уравнения множественной регрессии.
10. Проверка гипотезы о линейном соотношении между коэффициентами уравнения регрессии.
11. Тест Чоу.

Рекомендации по изучению темы

С указанными выше вопросами можно ознакомиться как по учебнику [1] (пп. 13.5 – 13.8), так и по учебнику [3] (п. 10.3). Можно использовать также учебник [2] (глава 4)

Задания для самостоятельной работы:

а) Ответьте на вопросы 7 – 8 теста к главе 13 учебника [1];

б) Выполните следующие упражнения.

1. По 1000 выборочным данным была оценена регрессионная модель зависимости уровня оплаты труда w от возраста Age: $\ln\widehat{w} = 1{,}2 + \underset{(0{,}0031)}{0{,}0214}Age - \underset{(0{,}0003)}{0{,}0004}Age^2$.

В скобках указаны стандартные ошибки. Тестируйте гипотезу о линейной зависимости *ln w* от возраста. Рассмотрите случаи уровня значимости 10%, 5%, 1%.

2. Была оценена модель зависимости логарифма зарплаты w от уровня образования edu и возраста age: $\ln\widehat{w} = 1{,}2 + \underset{(0{,}01)}{0{,}02}edu + \underset{(0{,}016)}{0{,}01}age - \underset{(0{,}0002)}{0{,}0001}age^2, \quad n = 21$.

Дайте интерпретацию коэффициента β_1. Постройте доверительный интервал для коэффициента β_3 с доверительной вероятностью 90%. Тестируйте гипотезу о линейной зависимости логарифма зарплаты от возраста при уровне значимости 10%.

3. По выборке объема 19 была оценена модель регрессии (в скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов): $\widehat{y} = 1{,}2 + \underset{(0{,}02)}{2{,}2x_1} - \underset{(0{,}03)}{5{,}1x_2} + \underset{(0{,}8)}{1{,}1x_3}$. ESS = 110,9, USS = 40,5.

Чему равен коэффициент детерминации? Проверьте значимость регрессии в целом (при уровне значимости 5%) и сформулируйте проверяемую статистическую гипотезу. Вычислите R^2_{adj}.

4. По данным наблюдений построена регрессия зависимой переменной Y от независимых регрессоров X. По приведенным результатам применения инструмента анализа данных «Регрессия» программы MS Excel ответить на следующие вопросы.

1) Записать полученную оценку уравнения регрессии.
2) Проверить на 5%-уровне значимость каждого из коэффициентов регрессии.
3) Проверить значимость регрессии в целом.
4) Заполнить пропуски.

Регрессионная статистика	
Множественный R	?
R-квадрат	?
Нормированный R-квадрат	0,948073
Стандартная ошибка	?
Наблюдения	25

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	3	?	0,053729	?	2,96E-14
Остаток	21	0,007672	?		
Итого	24	?			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	?	?	?	0,010541	0,517274	3,471432

X1	0,387018	?	?	0,008809	0,108292	?
X2	?	0,084626	?	3,12E-05	?	-0,27061
X3	-0,0027	0,00481	-0,56091	?	-0,0127	?

5. После финансового кризиса спрос на чебуреки упал, и менеджер был вынужден тратить часть средств на рекламу. Для изучения зависимости объема продаж от цены и расходов на рекламу менеджер использует следующую модель: $q = \beta_1 + \beta_2 p + \beta_3 a + \beta_4 a^2 + \varepsilon.$

В таблице приведены данные наблюдений за 20 недель (t-номер недели, q_t- количество проданных чебуреков, p_t - цена одного чебурека (руб.), a_t - затраты на рекламу (100 руб.)).

t	q_t	P_t	a_t	t	q_t	P_t	a_t
1	525	5.92	4.79	11	407	6.67	5.19
2	567	6.50	3.61	12	608	6.92	3.27
3	396	6.54	5.49	13	399	6.97	4.69
4	726	6.11	2.78	14	631	6.59	3.79
5	265	6.62	5.74	15	545	6.50	4.29
6	615	5.15	1.34	16	512	6.86	2.71
7	370	5.02	5.81	17	845	5.09	2.21
8	789	5.02	3.39	18	571	6.08	3.09
9	513	6.77	3.74	19	539	6.36	4.65
10	661	5.57	3.59	20	620	6.22	1.97

а) Какие знаки $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ вы ожидаете получить?

б) Найдите оценки коэффициентов регрессии и их стандартные ошибки. Соответствуют ли знаки оценок вашим ожиданиям?

в) Пусть себестоимость производства чебурека равна 2 руб. Найдите оптимальную цену при расходах на рекламу, равных 280 руб.

г) Найдите оптимальный уровень расходов на рекламу при цене чебурека 6 руб.

д) Помогите менеджеру найти оптимальное решение (максимизирующее чистый доход).

е) Найдите 95%-доверительные интервалы для $\beta_2, \beta_3, \beta_4$. Проверьте значимость влияния цены, а также расходов на рекламу на количество проданных чебуреков.

6. Случайным образом было выбрано 300 домов. Пусть P – цена дома (в $1000), BDR – количество спальных комнат, Bath – число ванных комнат, Hsize – площадь дома, Lsize – площадь участка вокруг дома, Age – возраст дома (в годах), Poor – бинарная переменная, равная 1, если состояние дома оценивается как плохое. Была оценена регрессия

$$\widehat{P} = \underset{(23,9)}{134,3} + \underset{(2,13)}{0,369}BDR + \underset{(8,94)}{22,7}Bath + \underset{(0,014)}{0,134}Hsize + \underset{(0,000048)}{0,00036}Lsize + \underset{(0,311)}{0,016}Age - \underset{(9,5)}{23,4}Poor,$$

$$R^2_{adj} = 0,63, \quad s = 6,5.$$

а) Пусть владелец дома решил переделать одну из жилых комнат (не спальню) в новую ванную комнату. Каково ожидаемое изменение цены дома?

б) Пусть владелец дома решил добавить еще одну ванную комнату, увеличив площадь дома на 10м^2. Каково ожидаемое изменение цены дома?

в) Найдите коэффициент R^2.

г) Значимо ли фактор BDR влияет на цену дома? Рассмотрите уровни значимости 1%, 2%, 5%, 10%.

д) Обычно дома с шестью спальнями стоят гораздо дороже, чем дома с двумя спальнями. Как это соотносится с ответом на предыдущий пункт? Дайте несколько возможных объяснений.

е) Владелец дома увеличил площадь участка на 2000 м^2. Постройте 99% доверительный интервал для изменения стоимости дома.

ж) F-статистика для проверки (совместного) влияния BDR и Age равна F = 0,782. Значимо ли факторы BDR и Age совместно влияют на стоимость дома? Рассмотрите уровни значимости 1%, 5%, 10%.